



Seminar
Ontologiebasierte Wissensmodellierung



Die Ausarbeitung aus dem Buch

„Parts and Places“

von R. Casati und A. C. Varzi :

Kapitel drei

„Parthood Structures“

Vortrag gehalten am 5.6.02

von Fereshteh Aghaei und

Olga Novosolova

Überblick

Bei der Betrachtung der Teil-Ganze-Relation unterscheidet man zwischen

- dem mereologischen Aspekt, der das Konzept des Teils betrifft,
- und dem topologischen Aspekt, der das Konzept des Ganzen betrifft

Die wichtigste Frage: Wie können diese zwei Aspekte in einer allgemeinen Theorie (Mereotopologie) miteinander verbunden werden?

(Wir beschäftigen uns in dieser Ausarbeitung mit dem mereologischen Aspekt)



Inhalt



- Begriffsbildung Parthood, Mereologie
- Der Begriff „Teil“
- Teil und Komponente
- Der Kern der mereologische Theorie
- Prinzipien der Komplementbildung
- Abschluss Prinzipien
- Uneingeschränkte Fusion
- Atomismus

Einführung I

Parthood: (=Teilheit)

Die Analyse der Parthood-Relation war der Mittelpunkt der philosophischen Forschung seit den frühesten Tagen der Philosophie; angefangen bei den prä-sokratischen Atomisten und fortgesetzt durch Arbeiten der Antike und der mittelalterlichen Ontologen.

Parthood erhielt ihre Bedeutung in der modernen Philosophie durch die Arbeiten von F. Berentano und Husserl

Einführung II

meros auf griechisch bedeutet „Teil“ und

Mereologie ist die Theorie der Relation von Teil und Ganzem

Die Mereologie ist ein einfacher Versuch, die allgemeinen, zugrunde liegenden Prinzipien, die Relationen zwischen einem Individuum und seinen Bestandteilen, festzulegen.

Vergleichbar mit der Mengentheorie, die versucht, die zugrunde liegenden Prinzipien, die Relationen zwischen einer Klasse und ihren bestehenden Elementen, zu bestimmen.

Einführung III

Vergleich Mereologie in Mengentheorie und Nominalismus:

Mereologie ist nicht auf die Existenz der abstrakten Entitäten festgelegt, d.h. das Ganze kann genauso konkret sein wie der Teil.

Aber Mereologie trägt auch die NICHT-nominalistische Eigenschaften, d.h. der Teil kann genauso abstrakt sein wie das Ganze.

(Nach nominalistischem Standpunkt verzichtet man auf die abstrakte Entitäten oder (präziser) behandelt man alle Objekte als Individuen (Entitäten des niedrigsten logischen Typs))

Die Bedeutung des Wortes „Teil“ I

Aristoteles unterscheidet in seinem Buch „Metaphysik“ vier philosophisch relevante Bedeutungen des Wortes „Teil“

Ein Teil bedeutet:

1. Dasjenige, in welches das Quantitative irgendwie geteilt werden kann. (z.B. 2 ist ein Teil von 3)
2. Die Elemente, in denen ein Formbegriff geteilt werden kann. (z.B. Arten sind Teile des Geschlechts)

Die Bedeutung des Wortes „Teil“ II

Ein Teil bedeutet:

3. Die Zerlegung des Ganzen, sowohl was die Form als auch die Zusammensetzung betrifft (z.B. von einem bronzenen Würfel sind sowohl die Bronze als auch die Winkel ein Teil)
4. Das, was sich in dem erklärenden Begriff jedes Dinges findet (z.B. das Geschlecht ist Teil der Art)

Allgemeine Bedeutung des Wortes „Teil“

Husserl's Hinweis auf eine allgemeine Bedeutung des Wortes „Teil“ ist auch die Sichtweise von (Autor des Buches):

- Man kann irgendwas einen Teil nennen, was in einem Objekt unterschieden werden kann, oder umgangssprachlich: was in einem Objekt vorhanden ist.

Im allgemeinen kann der Gegenstand der Teil-Ganz-Beziehung unterschiedlich sein: Körperteile, Ereignisse, geographische Regionen, eine Menge von Zahlen.



Beispiel



z.B:

Der Schwanz ist ein Teil der Katze

Die Explosion war Teil des Unfalls

Die natürlichen Zahlen sind Teil der reellen
Zahlen

Der Central Park ist ein Teil von Manhattan

Teil und Komponente

Unterschied zwischen Teil und Komponente

Eine Komponente ist ein ausgezeichnetes Teil, welches beim Zusammenbau des Ganzen noch immer unabhängig von einem anderen Teil des Ganzen existiert.

Vergleich im Deutschen:

der Teil \Leftrightarrow das Teil

Wenn nicht explizit erklärt, werden in dieser Arbeit die Begriffe „der Teil“ und „das Teil“ (d. h. der Teil und die Komponente) synonym benutzt.

Der Kern einer mereologischen Theorie I

Die meisten Theorien stimmen darüber überein, dass Parthood eine partielle Ordnung ist. Das heißt:

Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität

- Jedes Ding ist ein Teil von sich selbst
- zwei unterschiedliche Sachen können nicht ein Teil von einander sein
- ein Teil von irgendeinem Teil einer Sache ist selber ein Teil dieser Sache

(diese Eigenschaften sind nicht völlig widerspruchsfrei. Wir sind an der räumlichen Anwendung der Mereologie interessiert.)

Der Kern einer mereologischen Theorie II

Definition: **Grund Mereologie (M)** ist die Theorie, welche durch folgende Axiome für das Parthood-Prädikat „P“ definiert ist:

(P.1) P_{xx} (Reflexivität)

(P.2) $P_{xy} \wedge P_{yx} \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)

(P.3) $P_{xy} \wedge P_{yz} \Rightarrow P_{xz}$ (Transitivität)

Der Kern einer mereologischen Theorie III

„M“ unterstützt folgende Definitionen:

- (1) $Oxy =_{def} \exists z(Pzx \wedge Pzy)$ (Overlap)
- (2) $Uxy =_{def} \exists z(Pxz \wedge Pzy)$ (Underlap)
- (3) $PPxy =_{def} Pxy \wedge \neg Pyx$ (Proper Part)
- (4) $OXxy =_{def} Oxy \wedge \neg Pxy$ (Over - crossing)
- (5) $UXxy =_{def} Uxy \wedge \neg Pyx$ (Under - crossing)
- (6) $POxy =_{def} OXxy \wedge OXyx$ (Proper Overlap)
- (7) $PUxy =_{def} UXxy \wedge UXyx$ (Proper Underlap)

Der Kern einer mereologischen Theorie IV

Es gilt:

Overlap und Underlap: symmetrisch, reflexiv, nicht transitiv. Das heißt:

$$\begin{array}{ll} Oxx & Uxx \\ Oxy \rightarrow Oyx & Uxy \rightarrow Uyx \end{array}$$

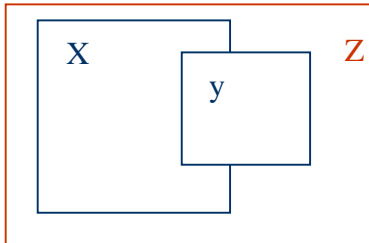
Proper Part: transitiv, irreflexiv, asymmetrisch. Das heißt:

$$\begin{array}{l} \neg PPxx \\ PPxy \rightarrow \neg PPyx \\ PPxy \wedge PPyz \rightarrow PPxz \end{array}$$

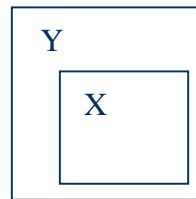
Man kann Identität als Konsequenz aus (P.2) so definieren:

$$x = y \leftrightarrow Pxy \wedge Pyx$$

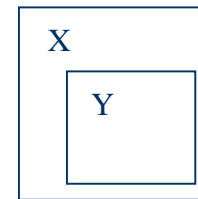
Der Kern einer mereologischen Theorie V



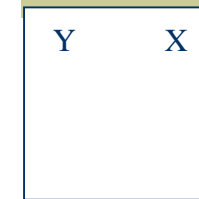
Oxy	Oxy
(Uxy)	(Uxy)
OXxy	OXxy
(UXxy)	(UXxy)
POxy	POxy
(PUxy)	(PUxy)



Oxy	Oyx
Uxy	Uyx
OXxy	OXyx
Pxy	
PPxy	
UXxy	



Oxy	Oyx
Uxy	Uyx
OXxy	Pyx
	PPyx
	UXyx



Oxy	Oyx
Uxy	Uyx
Pxy	Pyx
x=y	y=x



Inhalt



- Begriffsbildung Parthood, Mereologie
- Der Begriff „Teil“
- Teil und Komponente
- Der Kern der mereologische Theorie
- Prinzipien der Komplementbildung
- Abschluss Prinzipien
- Uneingeschränkte Fusion
- Atomismus

Einführung

Eine mereologische Theorie ist eine Erweiterung von M um weitere Prinzipien, die (konditionale) Existenz bestimmter mereologischer Dinge, gegeben die Existenz anderer Dinge, geltend machen.

Die Grundideen:

- *Immer wenn ein Objekt einen echten Teil hat, hat es mehr als einen* (d.h., es gibt immer eine mereologische Differenz zwischen einem Ganzen und seinen echten Teilen).
- *Es existiert immer eine mereologische Summe zweier oder mehrerer Teile* (d.h., für eine beliebige Anzahl von Objekten gibt es ein Ganzes, das genau diese Objekte beinhaltet).

Schließlich kann man *die Frage nach der Existenz mereologischer Atome* (Objekte ohne echte Teile) untersuchen, und ob jedes Objekt aus Atomen zusammengesetzt ist (oder unter welchen Bedingungen angenommen werden kann, dass ein Objekt aus Atomen besteht).

Prinzipien der Komplementbildung I

Minimale Mereologie

Wir beginnen mit der ersten Art von Erweiterung, deren grundlegende Idee zwei unterschiedliche Formen annehmen kann:

Definition:

Eine Erweiterung der Grundmereologie M um ein viertes Axiom, das besagt: *jeder echte Teil muss durch einen anderen disjunkten Teil ergänzt sein:*

$$(P.4) \quad PPxy \rightarrow \exists z(Pzy \wedge \neg Ozx) \quad (\text{Schwache Komplementbildung})$$

heißt *Minimale Mereologie (MM)*.

Prinzipien der Komplementbildung II Extensionale Mereologie

Die zweite Form der Erweiterung durch Komplementbildung ist stärker. Das entsprechende Axiom besagt: *immer wenn ein Objekt kein Teil des anderen ist, existiert ein drittes Objekt, das ein Teil des ersten, aber nicht ein Teil des zweiten ist:*

$$(P.5) \quad \neg Pyx \rightarrow \exists z(Pzy \wedge \neg Ozx) \quad (\text{Starke Komplementbildung})$$

Offensichtlich, dass (P.5) impliziert (P.4).

Definition:

Die Theorie, die durch Ergänzung (P.5) zu M entsteht, ist eine Erweiterung der *Minimalen Mereologie* und heißt *Extensionale Mereologie (EM)*.

EM schließt alle Gegenmodelle, die unterschiedliche Objekte mit den gleichen echten Teilen enthalten, aus. Genaugenommen, es existiert ein Theorem in EM , das besagt: *nicht atomare Objekte mit den gleichen echten Teilen sind identisch.*

$$(14) \quad (\exists zPPzx \vee \exists zPPzy) \rightarrow (\forall z(PPzx \leftrightarrow PPzy) \rightarrow x = y) \quad (\text{Extensionalitätsprinzip})$$

Abschluss Prinzipien I

Summe

Dem zweiten Weg, M zu erweitern, entspricht der Idee, dass *ein mereologischer Bereich gegenüber verschiedener Operationen abgeschlossen sein muss*.

Betrachte zuerst die quasi boolischen Operationen der Summe (Fusion) und des Produkts.

$$(P.6) \quad Uxy \rightarrow \exists z \forall w (Owz \leftrightarrow (Owz \vee Owy)) \quad (\text{Summe})$$

(Wenn zwei Dinge in der U-Relation zu einander stehen, dann kann angenommen werden, dass ein kleinstes Ding existiert, von dem sie Teile sind – ein Ding, das genau und vollständig die beiden enthält.)

Beispiel: Der Daumen und der Zeigefinger stehen in der U-Relation, die sie Teile des Körpers sind. Solch ein kleinstes Ding ist die Hand, da sie genau den Daumen und den Zeigefinger beinhaltet.

Abschluss Prinzipien II Produkt

(P.7) $Oxy \rightarrow \exists z \forall w (Pwz \leftrightarrow (Pwx \wedge Pwy))$ (Produkt)

(Wenn zwei Dinge in der O-Relation zu einander stehen, dann kann angenommen werden, dass ein größtes Ding existiert, das Teil von beiden ist.)

Beispiel: Zwei sich kreuzende Straßen stehen in der O-Relation.
Die Kreuzung ist der größte gemeinsame Teil.

Definition:

Die Erweiterung von M um die Axiome (P.6) und (P.7) heißt *Abschlussmereologie* (*Closure Mereology CM*).

Abschluss Prinzipien III

Extensionale Abschlussmereologie

Definition:

Die Erweiterungen von *MM* bzw. *EM* um dieselben Axiome heißen entsprechend *Minimale* bzw. *Extensionale Abschlussmereologie* (*CMM* bzw. *CEM*).

Die Grundidee an Betrachtung der Extensionalität: *die Entitäten, deren konditionale Existenz wegen (P.6) und (P.7) gilt, müssen eindeutig sein.*

Sei ι ein Eindeutigkeitsoperator, dann gilt in *CEM*:

$$(15) \quad x + y =_{df} \iota z \forall w (Owz \leftrightarrow (Owx \vee Owy))$$

$$(16) \quad x \times y =_{df} \iota z \forall w (Pwz \leftrightarrow (Pwx \wedge Pwy))$$

Und (P.6) und (P.7) können umformuliert werden:

$$(P.6') \quad Uxy \rightarrow \exists z (z = x + y)$$

$$(P.7') \quad Oxy \rightarrow \exists z (z = x \times y)$$

D.h. zwei beliebige Dinge, die in U-Relation stehen, haben eine eindeutige mereologische Summe bzw. zwei beliebige Dinge, die in O-Relation stehen, haben ein eindeutiges Produkt.

Abschluss Prinzipien IV

Extensionale Abschlussmereologie

Anbetracht der Schwachen Komplementbildung (P.4) impliziert (P.7) die Starke Komplementbildung (P.5), d.h. *CMM* ist die gleiche Theorie wie *CEM*.

Mereologische Differenz und Komplement:

$$(17) \quad x - y =_{df} \iota z \forall w (Pwz \leftrightarrow (Pwx \wedge \neg Owy))$$

$$(18) \quad \sim x =_{df} \iota z \forall w (Pwz \leftrightarrow \neg Owx)$$

Abschluss Prinzipien VI

Universum und Null-Individuum

In vielen Versionen beinhaltet eine Abschlusstheorie ein Axiom, das eine *obere Grenze des mereologischen Bereichs* ausdrückt:

$$(19) \quad \exists z \forall x Pxz$$

(Es existiert etwas – ein universales Individuum – von dem alles ein Teil ist.)

Anbetracht der Extensionalität ist ein solches Objekt eindeutig:

$$(20) \quad U =_{df} \iota z \forall x Pxz \quad (\text{Universum})$$

U garantiert, dass zwei beliebige Objekte eine Summe haben.

Andererseits haben nicht viele Autoren gewagt, die Existenz eines *Null-Individuums* zu behaupten, das ein Teil von alles ist:

$$(21) \quad \exists z \forall x Pzx$$

Ohne solch eines Null-Individuums kann die Existenz eines Produktes nicht immer garantiert werden. Genauso wie Differenz und Komplement können nicht immer definiert werden – z.B. relativ zum Universum U .

Uneingeschränkte Fusion I

Allgemeine Mereologie

Wir können eine *allgemeine Abschlussbedingung* hinzufügen, d.h. eine Summe willkürlicher, nicht leerer Mengen von Objekten zulassen (und folglich auch ein Produkt willkürlicher Mengen der überlappenden Objekte: *das Produkt aller Elemente der Klasse A ist die Summe all dieser Dinge, die Teil von jedem Element von A sind.*)

Für jede Eigenschaft oder Bedingung ϕ existiert eine Entität, die alle diese Dinge enthält, die ϕ erfüllen.

$$(P.8) \quad \exists x\phi \rightarrow \exists z\forall y(Oyz \leftrightarrow \exists x(\phi \wedge Oyx)) \quad (\text{Fusionsaxiom})$$

wobei ϕ eine beliebige Formel ist

Definition:

Durch eine Erweiterung von M um das Axiom (P.8) bekommt man eine Theorie, die als *Klassische* oder *Allgemeine Mereologie (GM)* bekannt ist.

Uneingeschränkte Fusion II

Allgemeine Extensionale Mereologie

GM bzw. **GEM** sind die Erweiterungen von **CM** bzw. **CEM**, da (P.6) und (P.7) aus (P.8) folgen. Außerdem, an Betrachtung des Extensionalitätsprinzips gilt es, dass höchstens eine Entität das Fusionsaxiom erfüllen kann. So können in **GEM** die allgemeine Summe (σ) und das allgemeine Produkt (π) definiert werden:

$$(22) \quad \sigma x\phi =_{df} \iota z \exists y (Oyz \leftrightarrow \exists x (\phi \wedge Oyx))$$

$$(23) \quad \pi x\phi =_{df} \sigma z \forall x (\phi \rightarrow Pzx)$$

Folglich kann (P.8) umformuliert werden:

$$(P.8') \quad \exists x \phi \rightarrow \exists z (z = \sigma x\phi)$$

(P.8') impliziert

$$(24) \quad \exists x \phi \wedge \exists y \forall x (\phi \rightarrow Pyx) \rightarrow \exists z (z = \pi x\phi)$$

Uneingeschränkte Fusion III

Allgemeine Extensinale Mereologie

$$(25) \quad x + y = \sigma_z(Pxz \vee Pyz)$$

$$(26) \quad x \times y = \sigma_z(Pzx \wedge Pzy)$$

$$(27) \quad x - y = \sigma_z(Pzx \wedge \neg Ozy)$$

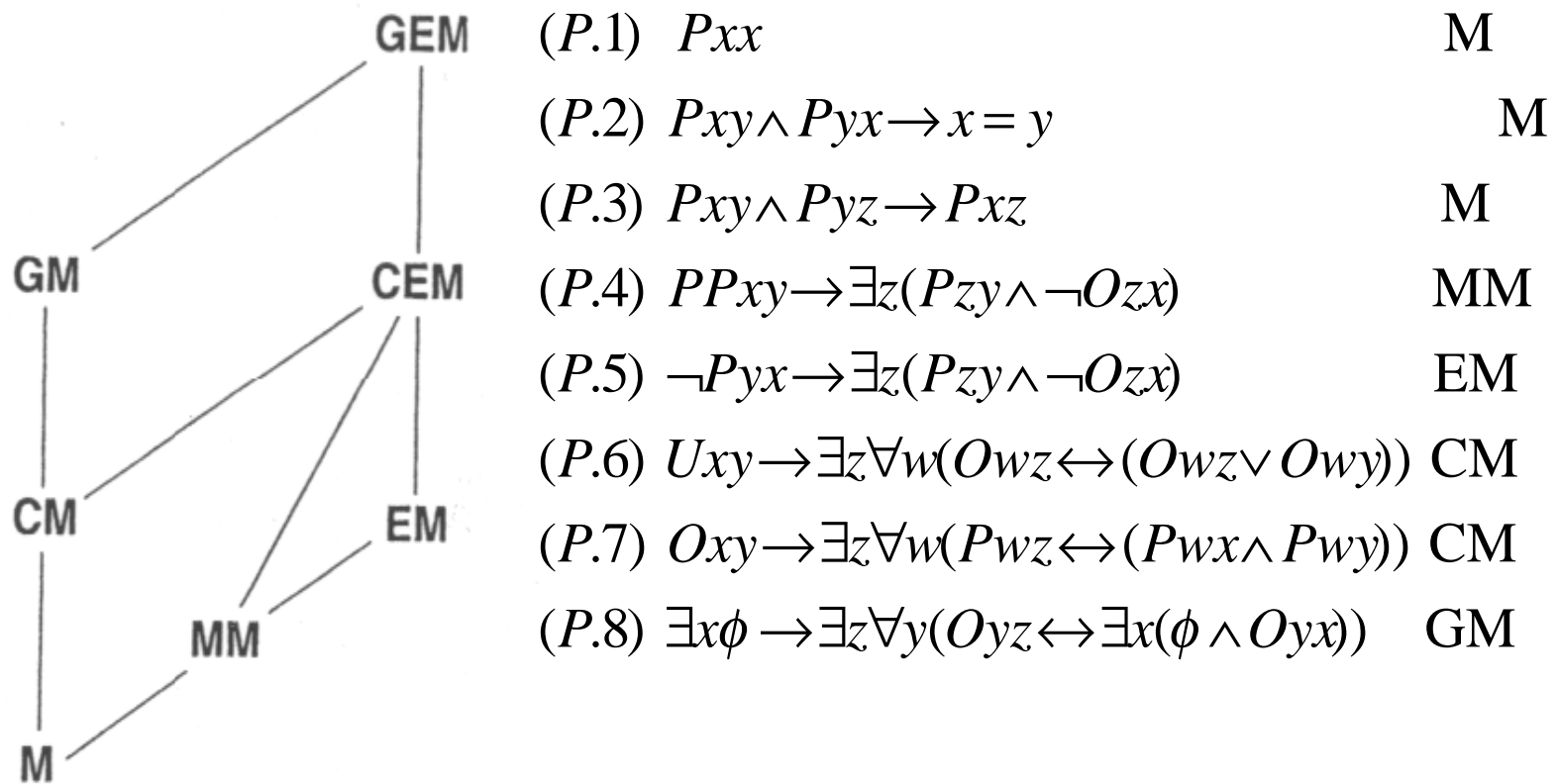
$$(28) \quad \sim x = \sigma_z(\neg Ozx)$$

$$(29) \quad U = \sigma_z(Pzz)$$

1935 zeigte Tarski, dass die durch **GEM** axiomatisierte Parthood-Relation die selben Eigenschaften hat, wie die mengentheoretische Inklusion.

Jedes Modell von **GEM** ist isomorph zu einer vollständigen quasi-Boolischen Algebra (= Boolische Algebra ohne das Null Element).

Logischer Raum mereologischer Theorien



Atomismus I

Atomlosigkeit

Zu untersuchende Fragen:

- *Gibt es irgendwelche mereologische Atome, d.h. die Entitäten ohne echte Teile?*
- *Und wenn solche Atome gibt, besteht alles aus ihnen?*

Behauptung: Es gibt keine Atome.

Definition:

Sei X eine mereologische Theorie. Die atomlose Variante von X ($\bar{A}X$) ist die Erweiterung von X um das folgende Axiom:

$$(P.9) \quad \forall x \exists y (PPyx) \quad (\text{Atomlosigkeit})$$

Atomismus II

Atomarität

Behauptung: Grundsätzlich alles besteht aus Atomen.

Definition:

Sei X eine *mereologische* Theorie. Die atomare Variante von X (AX) ist die Erweiterung von X um das folgende Axiom:

$$(P.10) \quad \forall x \exists y (Pyx \wedge \neg \exists z Pzxy) \quad (\text{Atomarität})$$

(P.9) und (P.10) sind gegenseitig inkonsistent, jedoch ist jede bis jetzt betrachtete mereologische Theorie mit beiden Begriffen kompatibel und kann zu einer *atomaren* oder *atomlosen Theorie* erweitert werden.

Jedes endliches Modell von **GEM** muss atomar sein, und ein atomloses Modell muss unendliche Kardinalität haben.